ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d'ADMISSION 1988

MATHEMATIQUES *(Temps accordé : 4 heures)* [Coefficient : 3]

L'épreuve se compose de deux exercices et d'un problème indépendants.

PREMIER EXERCICE

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.
On considère l'élément P de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P(X) = X^4 + 16 .$$

1°/ Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2°/ Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

3°/ Pour tout nombre réel α , on considère l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{x^4 + 16} .$$

a) Calculer $I(\alpha)$.

b) Déterminer, si elle existe, la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

DEUXIEME EXERCICE

Les parties I et II sont indépendantes

I.- On considère sur l'intervalle $I = [0 , \pi]$ l'équation différentielle :

(E) $\quad y \sin x + y' \cos x = x + \sin x \cos x$.

1°/ Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2} , \pi\right]$. (Indication : on pourra diviser par $\cos^2 x$) .

2°/ a) Déterminer les solutions de (E) sur I .

b) Montrer qu'il existe une et une seule fonction f , solution de (E) sur I , vérifiant $f(0) = 0$.

II.- On considère la fonction g telle que : $g(x) = x + \tan x$.

1°/ Montrer que sur l'intervalle $]0 , \pi]$ il existe une et une seule solution de l'équation : $g(x) = 0$.
Soit α cette solution ; montrer que α appartient à $[\sqrt{3} , \pi]$.

2°/ Montrer que α vérifie la relation : $\alpha = \pi - \text{Arctan } \alpha$
(Arctan désigne la fonction Arctangente).

3°/ On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{3} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \pi - \text{Arctan } u_n \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{3} , \pi]$
(Indication : on pourra utiliser $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} > \pi$) .

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

d) Calculer α à 10^{-3} près en justifiant le résultat.

III.- Soit f la fonction définie au I.-2°/b) .

1°/ Dresser le tableau des variations de f sur l'intervalle I .

2°/ Représenter graphiquement f (On ne demande pas de préciser les points d'inflexion).

TOURNER S.V.P.

P R O B L E M E

Les parties II et III sont indépendantes ; la partie I leur est préliminaire.

Soit n un nombre entier strictement positif, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ des nombres entiers compris entre 1 et n.

Pour tout élément (i,j) de $\mathbb{N}_n^2$, on pose :

$$\left|\begin{array}{l} \delta_i^j = 0 \text{ , si } i \neq j \\ \delta_i^j = 1 \text{ , si } i = j \text{ .} \end{array}\right.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; elle est constituée des matrices $E_{k,\ell}$ dont l'élément situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne vaut $\delta_i^k \, \delta_j^\ell$.

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application "trace", notée T, par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad T(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \quad ,$$

où $m_{i,i}$ désigne l'élément de M situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $i^{\text{ème}}$ colonne.

I.-1°/ Montrer que T est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°/ Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, $T(AB) = T(BA)$.

3°/ Soit M et M' deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que : $M' = P^{-1}MP$) .

Montrer que : $T(M) = T(M')$.

4°/ Soit (i,j,k,ℓ) appartenant à $\mathbb{N}_n^4$; calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

II.- Soit $\mathcal{M}_n^*(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère la partie Φ de $\mathcal{M}_n^*(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\varphi \in \Phi\right) \Leftrightarrow \left(\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R}) \ , \ \varphi(AB) = \varphi(BA)\right)$$

1°/ Montrer que Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n^*(\mathbb{R})$.

2°/ Soit φ un élément de Φ . Montrer que :

a) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $\varphi(E_{i,j}) = \delta_i^j \, \varphi(E_{i,i})$

b) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$

3°/ Déterminer la dimension de Φ et en expliciter une base .

III.- On considère n nombres réels λ_1 , λ_2 , ..., λ_n deux à deux distincts et D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{i,i} \ .$$

On définit l'application L sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad L(Y) = DY - YD \ .$$

1°/ Montrer que L est linéaire.

2°/ Soit (i,j) appartenant à $\mathbb{N}_n^2$; calculer $L(E_{i,j})$.

3°/ Déterminer le rang et l'image de L .

4°/ Soit C et C' deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que C et C' sont semblables et qu'il existe (X',Y') de $\mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$ tel que $C' = X'Y' - Y'X'$.

Montrer qu'il existe (X,Y) de $\mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$ tel que $C = XY - YX$.

5°/ On admet le résultat suivant : si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel V et si f n'est pas une homothétie, il existe u appartenant à V tel que $(u,f(u))$ est libre .

Soit C un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; prouver l'équivalence :
$(T(C) = 0) \Leftrightarrow (C$ est semblable à une matrice de l'image de $L)$
[Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n] .

6°/ De ce qui précède, déduire l'équivalence :

$$\left(\exists (X,Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R}) \ ; \ C = XY - YX\right) \Leftrightarrow \left(T(C) = 0\right) .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail